

Capítulo 2

Distribuciones de Probabilidad

2.1. Variables aleatorias

Al objeto de modelizar un fenómeno y darle un tratamiento adecuado se introducen las *variables aleatorias*. Los elementos básicos de la Teoría de la Probabilidad establecidos en el capítulo precedente han servido para dar un primer paso en el estudio de la aleatoriedad o variabilidad de los resultados de un fenómeno. El objeto de este capítulo es llevar a cabo el mismo estudio, de una manera más prolija y usando para ello una teoría bien organizada de los estadísticos o variables aleatorias.

Pretendemos asociar a cada fenómeno una variable aleatoria de tal forma, que el matiz o característica fundamental de dicho fenómeno, quede claramente representado por los valores numéricos de dicha variable aleatoria. Así pues, una variable aleatoria puede ser considerada como el conjunto de todos los resultados numéricos y aleatorios de un experimento¹.

Nótese que la idea de sustituir el suceso en sí, por la característica en la que estamos interesados ya ha sido de alguna forma empleada en el Capítulo 1 cuando definíamos los estadísticos. La principal diferencia estriba en que con las variables aleatorias la aplicación de métodos matemáticos resulta sumamente efectiva en la determinación de la aleatoriedad la cual, además, no tiene por qué medirse sólo en términos de frecuencias, sino a partir de cualquier medida de probabilidad. Es en este marco general donde obtendremos los resultados clave que fundamentarán métodos de la Inferencia Estadística.

¹Se entiende por experimento una colección de concreciones del fenómeno que estamos estudiando.

La idea que se persigue al emplear variables aleatorias es olvidar el espacio de probabilidad original (Ω, \mathcal{A}, P) asociado al fenómeno, y trabajar en un espacio de probabilidad nuevo $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ en el que $\Omega' = \mathbb{R}$ o es un subconjunto de \mathbb{R} , y \mathcal{A}' es la σ -álgebra llamada de Borel \mathcal{B} que se define como

$$\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}.$$

El cómo medir las probabilidades de cada uno de los elementos de este conjunto (cómo definir P') se describe más adelante. La obtención de este nuevo espacio de medida está asociado a la v.a. que modela nuestro fenómeno. El uso $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ tendrá consecuencias espectaculares debido a la sistemática que los métodos matemáticos tienen en este nuevo espacio.

Se define *una variable aleatoria* ξ sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) como una función que actúa sobre el espacio muestral Ω a valores reales, es decir

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\rightarrow \mathbf{R} \\ \omega &\rightarrow \xi(\omega) \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad ,$$

donde además se verifica

$$\xi^{-1}((a, b]) \in \mathcal{A}, \quad \forall (a, b] \in \mathcal{B}.$$

El hecho de disponer de una variable aleatoria (v. a.) ξ sobre (Ω, \mathcal{A}, P) nos permite disponer de otro espacio de probabilidad más, $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ donde

$$\begin{aligned} \Omega' &= \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}' &= \mathcal{B}, \end{aligned}$$

y

$$P' = P_{\xi}^*$$

donde

$$P_{\xi}^*((a, b]) = P(\xi^{-1}((a, b])). \quad (2.1)$$

A P_{ξ}^* se la conoce como la medida de probabilidad inducida por la v.a. ξ . Conviene observar que (2.1) tiene perfecto sentido pues P actúa sobre los elementos de \mathcal{A} y $\xi^{-1}((a, b]) \in \mathcal{A}$; téngase en cuenta que $\xi^{-1}((a, b])$ es el conjunto de los eventos de Ω que mediante ξ tienen su imagen en $(a, b]$, es decir:

$$\xi^{-1}((a, b]) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in (a, b]\}.$$

Más tarde clasificaremos a las v. a. en discretas o continuas dependiendo de cuál sea la imagen de ξ sobre \mathbb{R} .

EJEMPLO 2.1 *Se tira un dado y se anotan los puntos que resultan. Asociado a este fenómeno elemental y con el objeto de estudiar los puntos que pueden salir en una tirada cualquiera se define la siguiente variable aleatoria: con $\Omega = \{(\omega_i) : \omega_i \in \{\omega_1, \dots, \omega_6\}\}$, siendo ω_i el suceso que consiste en que han salido i puntos,*

$$\begin{aligned}\xi &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ \xi(\omega_i) &= \text{número de puntos de } \omega_i = i.\end{aligned}$$

Obviamente ξ puede tomar los valores $1, 2, \dots, 6$, esto es $\text{Im } \xi = \{1, 2, \dots, 6\}$. Si el dado no está cargado entonces $P(\omega) = 1/6$ para todo $\omega \in \Omega$. En tal caso podemos calcular $P_\xi^*(A)$, cualquiera que sea $A \in \mathcal{B}$. Por ejemplo, los eventos más elementales:

$$\begin{aligned}P_\xi^*({2}) &= P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = 2\} \\ &= P\{\omega_2\} = 1/6.\end{aligned}$$

Es fácil darse cuenta que $P_\xi^*({x}) = 1/6$ si $x \in \text{Im } \xi$ y $P_\xi^*({x}) = 0$ si $x \notin \text{Im } \xi$. Del mismo modo se tiene que

$$\begin{aligned}P_\xi^*(A) &= P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\} \\ &= \frac{n}{6}\end{aligned}$$

siendo n el número de ω 's que por la aplicación ξ van a parar a A . Por ejemplo,

$$P_\xi^*((1, 4.5]) = \frac{1}{2}$$

ya que $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ y ω_5 son los únicos elementos de Ω , con probabilidad distinta de cero, que tienen su imagen en $(1, 4.5]$. De la misma forma se calculan las siguientes probabilidades:

$$P_\xi^*((1, 4)) = \frac{1}{3}, \quad P_\xi^*((-10, 1]) = \frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 2.2 *Se tiran un par de dados y se anota la suma de los puntos obtenidos. Determinemos Ω y la v. a. que podemos asociar al fenómeno. Es*

obvio que el espacio muestral es

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_i, \omega_j) : \omega_i, \omega_j \in \{\omega_1, \dots, \omega_6\}\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} (\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), \dots, (\omega_1, \omega_6) \\ \vdots \\ (\omega_6, \omega_1), (\omega_6, \omega_2), \dots, (\omega_6, \omega_6) \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Definimos las variables aleatorias

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \text{ptos. que aparecen en primer dado,} \\ \xi_2 &= \text{ptos. que aparecen en segundo dado.}\end{aligned}$$

Obsérvese que ambas variables aleatorias están definidas de la misma forma que la v.a. del ejemplo precedente.

Vemos entonces que la v. a. adecuada al caso es

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

definida como

$$\xi(\omega_i, \omega_j) = \xi_1(\omega_i) + \xi_2(\omega_j), \quad (\omega_i, \omega_j) \in \Omega.$$

ξ nos dará la suma de los puntos de los dos dados. Vemos que $\text{Im } \xi = \{2, 3, \dots, 12\} \subset \mathbb{R}$. Así mismo $P_\xi^*(\{x\}) > 0$ si $x \in \text{Im } \xi = \{1, 2, \dots, 12\}$ y $P_\xi^*(\{x\}) = 0$ si $x \notin \text{Im } \xi$.

Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}P_\xi^*(\{5\}) &= P\{\omega : \xi(\omega) = 5\} \\ &= P\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Según estos resultados, ¿cuál sería el valor más probable?

EJEMPLO 2.3 Se lanza una moneda 80 veces y se suma el número de caras obtenidas. Para esta situación denotamos $\Omega = \{C, X\}$ y

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si sale } C \text{ en el } i\text{-ésimo lanzamiento} \\ 0 & \text{si sale } X \text{ en el } i\text{-ésimo lanzamiento.} \end{cases}$$

Con esto lo que hacemos es lo mismo que el ejemplo anterior, definimos las v.a. encargadas de dar el resultado del i -ésimo lanzamiento. Para una

cualquiera de ellas, digamos ξ_i , se tiene lo siguiente: si se supone que la moneda está cargada de forma que $P(C) = 1/3$ y $P(X) = 2/3$, entonces $P_\xi^* (\{x\}) = 1/3$ si $x = 1$ y $P_\xi^* (\{x\}) = 2/3$ si $x = 0$ y $P_\xi^* (\{x\}) = 0$ si $x \notin \text{Im } \xi = \{0, 1\}$.

Entonces, asociado al fenómeno definimos la v.a.

$$\xi = \sum_{i=1}^{80} \xi_i;$$

esta variable dará el número de caras obtenidas al cabo de 80 lanzamientos. Conviene subrayar que la v.a. $\xi = \sum_{i=1}^{80} \xi_i$ está definida sobre el espacio muestral $\tilde{\Omega} = \Omega \times \dots \times \Omega$,

$$\xi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

e $\text{Im } \xi = \{0, 1, 2, \dots, 80\}$.

$\tilde{\Omega}$ consta de todas las sucesiones de caras y cruces con un total de 80 elementos. Por ejemplo, el suceso que consiste en dos caras en los dos primeros lanzamientos y el resto cruces es $\omega_0 = (C, C, X, X, \dots, X)$. Vemos por un lado que

$$\begin{aligned} \xi(C, C, X, X, \dots, X) &= \xi_1(C) + \xi_2(C) + \xi_3(X) + \dots + \xi_{80}(X) \\ &= 1 + 1 + 0 + \dots + 0 = 2 \end{aligned}$$

y por otro, gracias a la independencia de los resultados de la moneda, que ²

$$\begin{aligned} P((C, C, X, X, \dots, X)) &= P(C)P(C)P(X)\dots P(X) \\ &= (1/3)^2 (2/3)^{78}. \end{aligned}$$

Supóngase que estamos interesados en calcular $P_\xi^*(2)$; por definición

$$P_\xi^*(2) = P\left(\left\{\omega \in \tilde{\Omega} : \xi(\omega) = 2\right\}\right);$$

no es difícil comprobar que $\omega_0 \in \left\{\omega \in \tilde{\Omega} : \xi(\omega) = 2\right\}$ y que además de este evento existen muchos otros pertenecientes a $\left\{\omega \in \tilde{\Omega} : \xi(\omega) = 2\right\}$. Este conjunto está formado por todas las tiras de 80 elementos, de los cuales 2 son

² (C, C, X, X, \dots, X) es el evento que consiste en obtener cara en primera tirada, y cara en segunda, y cruz en tercera, y ... Obviamente se trata una intersección de sucesos independientes.

caras y 78 son cruces. La probabilidad de cada uno de ellos es siempre la misma y vale $(1/3)^2 (2/3)^{78}$. En total habrá $\binom{80}{2}$ elementos. Puesto que estos elementos son disjuntos entre sí,

$$P_{\xi}^*(2) = \binom{80}{2} (1/3)^2 (2/3)^{78}.$$

Del mismo modo

$$P_{\xi}^*(k) = \binom{80}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{80-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

con $k \in \text{Im } \xi = \{0, 1, 2, \dots, 80\}$.

Los ejemplos 2.1-2.3 tienen en común que la imagen de la v.a. asignada tiene una cantidad finita de puntos de \mathbb{R} . Son ejemplos de variables aleatorias de tipo discreto. Esta definición de v.a discreta será precisada más adelante y se hará en términos de su función de distribución. Es de destacar que cuando $\text{Im } \xi$ es muy grande, es infinita, la naturaleza del fenómeno varía de manera notable. Distingamos dos situaciones:

1. Cuando el espacio muestral consta de infinitos elementos pero se trata de una cantidad numerable, es decir, hay tantos como números naturales. Analizamos este caso en el Ejemplo 2.4.
2. Cuando el espacio muestral consta de infinitos elementos pero se trata de una cantidad no numerable, es decir, hay tantos como números reales. Es el caso del Ejemplo 2.5

EJEMPLO 2.4 *Se supone que las dos únicas concreciones de un fenómeno son E ó F , con $P(E) = p \in (0, 1)$. Se observa el fenómeno hasta que aparece el primer E . Ante esta situación estamos interesados en el número de veces ue ha de realizarse el fenómeno hasta que aparece el primer E . Consideramos por tanto el espacio muestral compuesto por sucesiones de F 's junto con un E al final. Si suponemos que las realizaciones del fenómeno son independientes entonces, por ejemplo, para el evento $\omega_0 = (F, \overset{x-1}{\dots}, F, E)$ se tiene*

$$P(\omega_0) = (1 - p)^{x-1} p.$$

Definamos la v.a. ξ que da el número de eventos que se realizan hasta realizarse el primer E . Así, en particular, $\xi(\omega_0) = x$. Para esta v.a. se tiene que $\text{Im } \xi = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

$$P_{\xi}^* (\{x\}) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

EJEMPLO 2.5 Sea el fenómeno consistente en calcular la resistencia a tracción de un determinado tipo placa fina diseñada por cierto fabricante de automóviles. Se sabe por experiencia que los valores hasta los cuales resiste la placa oscilan entre $A = 5$ y $B = 10$ kilogramos, siendo cualquiera de ellos igual de frecuente que los demás. Definimos ξ , la v.a. que mide la resistencia, i.e. $\xi(\omega) =$ resistencia máxima de ω en kgs. Ω consta de infinitos (no numerable) elementos puesto que pueden darse tantas placas como valores entre 5 y 10. Con ξ identificamos una placa con su resistencia. Para esta situación, la probabilidad de que una placa tenga una resistencia máxima de x kgs exactamente, se define como cero. Asimismo, definimos la probabilidad de que una placa posea una resistencia máxima entre b y a kgs como $\frac{b-a}{B-A}$.

Con estas definiciones se tiene

$$P_{\xi}^* (\{x\}) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

y

$$P_{\xi}^* ((a, b]) = \frac{b - a}{B - A}$$

si $(a, b) \subset (A, B)$. En general

$$P_{\xi}^* ((a, b]) = \frac{\text{longitud } ((a, b) \cap (A, B))}{B - A}.$$

En esta ocasión ξ es una v.a. de tipo continuo con imagen $\text{Im } \xi = [5, 10]$.

En algunos casos, y ante la situación en la que la v.a. ξ toma una gran cantidad de valores, se recurre a dar como válida la hipótesis de que el espacio muestral, y por tanto $\text{Im } \xi$, está formada por infinitos valores (por una cantidad no numerable). Aunque de hecho esto no sea así, los resultados en términos de probabilidades obtenidos suelen ser bastante representativos de lo que en verdad está ocurriendo con el fenómeno que estamos estudiando. Este es el caso del Ejemplo 2.6.

EJEMPLO 2.6 *Se selecciona al azar un estudiante de la Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM) y sea ξ el peso del estudiante elegido. Supongamos que hay 50000 alumnos (los cuales pueden numerarse), con lo cual podemos suponer $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{50000}\}$. Definimos $\xi(\omega) =$ peso de ω , donde $\omega \in \Omega$.*

En cuanto a la imagen de la variable aleatoria hemos de decir que en realidad no pueden ocurrir más de 50000 pesos diferentes. Sin embargo, debido a la imposibilidad de controlar todos los pesos, será conveniente pensar en que ξ puede alcanzar cualquier valor entre el valor del menor peso (el del más delgado de la UCLM), digamos 30 kg., y el del más pesado, digamos que 120 kg. Es decir, consideraremos a Ω como si un conjunto de infinitos elementos se tratase. Como consecuencia tendremos que $\text{Im } \xi$ será un subconjunto de \mathbb{R} de infinitos valores, en concreto $\text{Im } \xi = [30, 120]$. Pueden ser varias las maneras definir la función de probabilidad en este nuevo espacio muestral. Las distintas alternativas para definir una probabilidad sobre un espacio de infinitos (no numerable) elementos serán estudiadas más adelante.

2.2. Distribuciones de probabilidad

El instrumento esencial que se define a partir de la probabilidad P_ξ^* es su función de distribución. Esta función juega el mismo papel que el de las frecuencias acumuladas en Estadística Descriptiva por lo podemos decir que su uso va facilita el manejo de las probabilidades.

DEFINICIÓN 2.1 *Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de distribución si verifica las siguientes propiedades:*

1. *F es no decreciente, i.e., $F(x+h) \geq F(x) \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \forall h \geq 0$,*
2. *F es continua por la derecha, i.e.*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si además ocurre que

3. *$F(-\infty) \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,*
4. *$F(\infty) \doteq \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,*

entonces F se dice que es una función de distribución de probabilidad.

NOTA 2.1 Dada una función de distribución de probabilidad F podemos definir una medida de probabilidad μ asociada sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, a saber,

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \quad (2.2)$$

de hecho se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1 Si F es una función de distribución de probabilidad entonces μ definida como en (2.2) es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Y recíprocamente, si μ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ entonces la función F definida según (2.2) es una función de distribución.

NOTA 2.2 De acuerdo con (2.2) se tiene

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

Consecuencia importante: si tomamos $\mu = P_\xi^*$ entonces la igualdad anterior permite definir la siguiente función

$$F_\xi(x) \doteq P_\xi^*((-\infty, x]) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} = P(\xi^{-1}((-\infty, x]))$$

es decir, definimos (vía Teorema 2.1) la función de distribución asociada a la v.a. ξ , F_ξ , como la función de distribución asociada a la medida P_ξ^* ; así

$$F_\xi(x) = P_\xi^*((-\infty, x]). \quad (2.3)$$

PROPOSICIÓN 2.2 Con F_ξ definida como en (2.3) se tiene

1. $F_\xi(+\infty) = 1$
2. $F_\xi(-\infty) = 0$.
3. $F_\xi(b) - F_\xi(a) = P\{\omega : \xi(\omega) \in (a, b]\} = P_\xi^*((a, b])$.
4. $F_\xi(x) \leq F_\xi(x+h) \quad \forall x \text{ y } \forall h \geq 0$.
5. $F_\xi(x+h) - F_\xi(x) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0^+$.

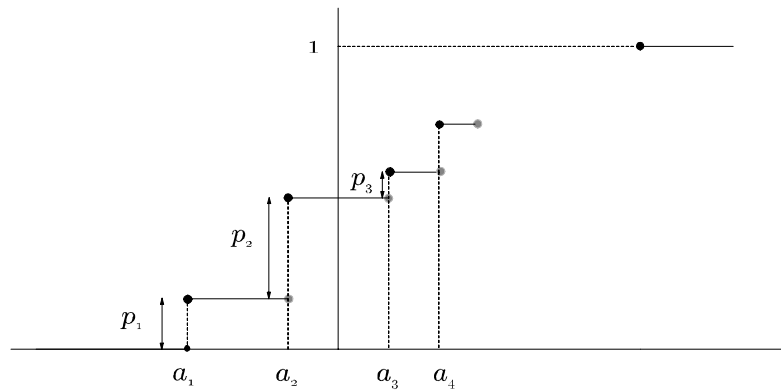


Figura 2.1: Gráfico de una función de distribución de tipo discreto

2.3. Tipos de variables aleatorias

DEFINICIÓN 2.2 Una variable aleatoria ξ se dice que es de tipo discreto, o discreta, si su función de distribución asociada, $F_\xi(x)$, es constante a trozos, existiendo una cantidad finita o infinita numerable de ‘saltos’ (ver Figura 1).

Recordemos que

$$\begin{aligned} F_\xi(b) - F_\xi(a) &= P\{\omega : a < \xi(\omega) \leq b\} = \\ &= P\{\xi \in (a, b]\} \\ &= P_\xi^*((a, b]). \end{aligned}$$

Vemos que si $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son los puntos donde tiene lugar el salto de la v.a. entonces

$$P_\xi^*(a_n) = P\{\xi = a_n\},$$

y puesto que $a_n = \lim_{y \nearrow a_n} (y, a_n]$, entonces con $\Delta_y \doteq (y, a_n]$,

$$\begin{aligned} P\{\xi = a_n\} &= P\left\{\xi \in \lim_{y \nearrow a_n} \Delta_y\right\} = \\ &= \lim_{y \nearrow a_n} P\{\xi \in \Delta_y\} \\ &= \lim_{y \nearrow a_n} P\{\xi \in (y, a_n]\} \\ &= \lim_{y \nearrow a_n} F_\xi(a_n) - F_\xi(y) \\ &= \text{‘salto en’ } a_n. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que si a es un punto en el que no hay salto entonces $P_\xi^*(a) = 0$. Deducimos por tanto que la probabilidad está concentrada en los puntos de salto.

A la función $P_\xi^*(\cdot)$, que a cada punto a_n (llamado *punto de masa*) le asocia su salto o *peso*, $p_n \doteq P_\xi^*(a_n)$, la llamamos *función de densidad de masa asociada a la v.a. ξ* .

Es importante tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$F_\xi(x) = \sum_{j:a_j \leq x} P_\xi^*(a_j)$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_\xi^*(a_j) = 1.$$

La primera igualdad tiene lugar debido a que la probabilidad que hay en el intervalo $(-\infty, x]$ está concentrada en los puntos de masa a_j que pertenecen a dicho intervalo. Para probar la segunda identidad basta notar que la probabilidad del total es uno, es decir $1 = P_\xi^*(\mathbb{R}) = P_\xi^*\{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots\} = \sum_{j=1}^{\infty} P_\xi^*(a_j)$.

NOTA 2.3 Caracterización de las funciones de densidad de masa: *una función $P_\xi^*(\cdot)$ tal que $P_\xi^*(a_n) = p_n$ y $P_\xi^*(x) = 0$ si x no es ningún a_i , se dice que es de densidad de masa de probabilidad si, y sólo si, se cumple que $p_n \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{\infty} P_\xi^*(a_j) = 1$.*

Una tal función tiene siempre asociada una distribución constante a trozos.

EJEMPLO 2.7 *Se eligen tres personas al azar residentes en la ciudad de Londres. Se sabe que la proporción de conservadores allí es de 0.4. Asociar una v.a. al fenómeno aleatorio que consiste en saber si es o no conservador cada una de estas personas.*

Definimos las siguientes variables aleatorias:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si es conservador la } i\text{-ésima persona} \\ 0 & \text{si no es conservador la } i\text{-ésima persona} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Definimos asociado al fenómeno la variable aleatoria que da el número de conservadores entre los tres encuestados, será

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

donde

$$\xi(w_1, w_2, w_3) = \xi_1(w_1) + \xi_2(w_2) + \xi_3(w_3)$$

y (w_1, w_2, w_3) cualquier tripleta de elementos de la población elegida al azar. Nótese que ξ es una v.a. de tipo discreto con puntos de masa en 0, 1, 2 y 3. Calculamos sus pesos.

$$P_\xi^*(0) = \binom{3}{0} (0.6)^3 = 0.216, \quad (2.4)$$

$$P_\xi^*(1) = 0.432, \quad P_\xi^*(2) = 0.288, \quad P_\xi^*(3) = 0.064. \quad (2.5)$$

Además la función de distribución asociada es

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 0.216 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0.648 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 0.936 & \text{si } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{si } x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

NOTA 2.4 Recíprocamente: supongamos que una v.a. ξ tiene como distribución a

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 0,216 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0,648 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 0,936 & \text{si } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{si } x \in [3, +\infty) \end{cases}.$$

Calcular la función densidad de masa, demostrar que es de hecho la definida en (2.4)-(2.5).

NOTA 2.5 Obsérvese que si Ω es finito o numerable entonces la variable $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será discreta ya que su imagen es discreta (finita o infinita numerable).

DEFINICIÓN 2.3 Una v.a. ξ se dice de tipo continuo, o continua, si su distribución F_ξ es continua.

Se define la densidad media de probabilidad en un intervalo $(x, x+h]$, de amplitud h , como

$$\frac{F_\xi(x+h) - F_\xi(x)}{h};$$

si en esta situación hacemos $h \rightarrow 0$ y suponemos que F_ξ es derivable en x , entonces se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_\xi(x+h) - F_\xi(x)}{h} = F'_\xi(x) \doteq f_\xi(x),$$

que es la densidad media de probabilidad en un intervalo infinitamente pequeño, digamos de longitud dx . Se comprueba de manera trivial que la probabilidad en $(x, x+dx)$ es $f_\xi(x) dx$. A f_ξ se la conoce con el nombre de *función de densidad de probabilidad* asociada a la v.a. ξ . Por tanto

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt.$$

Se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1,$$

y para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f_\xi(x) \geq 0.$$

Además

$$P_\xi^*\{(a, b]\} = \int_a^b f_\xi(t) dt,$$

y en general

$$P_\xi^*\{A\} = \int_A f_\xi(t) dt.$$

Es decir, por ejemplo $P_\xi^*\{(a, b]\}$ es el área que queda delimitado por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la curva $y = f_\xi(x)$ (ver Figura 2).

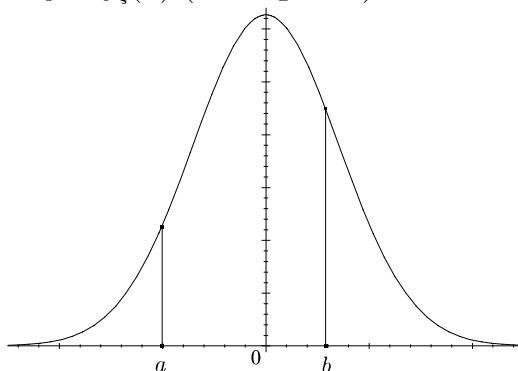


Figura 2.

NOTA 2.6 Caracterización de las funciones de densidad de probabilidad: $f_\xi(x)$ es de densidad de probabilidad si, y sólo si, $f_\xi(x) \geq 0 \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1$.

EJEMPLO 2.8 Sea

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Comprobemos que es una función distribución de alguna v.a. de tipo continuo. Primero vemos que satisface las propiedades (1)-(4) de la Definición 2.1, y seguidamente comprobamos que es una función continua. Para calcular la función de densidad asociada basta con emplear

$$f(x) = \frac{dF}{dx}(x)$$

para casi todos los puntos $x \in \mathbf{R}$. La derivación es inmediata y se obtiene

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

EJEMPLO 2.9 Tratamos de estudiar la duración en minutos de las llamadas telefónicas de cierta población. Se supone que el fenómeno está regido o modelizado por una ley de probabilidades con densidad de probabilidad dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (t \text{ dada en minutos}).$$

- (i) Calcular la probabilidad de que una llamada dure entre 1 y 3 minutos.
- (ii) La misma probabilidad que antes pero condicionado por el hecho de que sabemos que dura más de 2 minutos.

Empezamos recordando que

$$P\{\xi \in (a, b]\} = P_\xi^*\{(a, b]\} = \int_a^b f(t) dt.$$

Así

$$\begin{aligned} P_\xi^*\{(1, 3)\} &= P_\xi^*\{(1, 3]\} = \int_1^3 f(t) dt = \\ &= \int_1^3 2e^{-2t} dt = e^{-2} - e^{-6} \end{aligned}$$

es la respuesta para (i). La respuesta a (ii) es

$$\begin{aligned} P\left\{\xi \in (1, 3) \mid_{\xi > 2}\right\} &= \frac{P\left\{\{\xi \in (1, 3)\} \cap \{\xi > 2\}\right\}}{P\{\xi > 2\}} = \\ &= \frac{P_{\xi}^*\{(2, 3)\}}{P_{\xi}^*\{[2, \infty)\}} = \frac{e^{-4} - e^{-6}}{e^{-4}}. \end{aligned}$$

Nota:

$$\begin{aligned} P_{\xi}^*\{[2, \infty)\} &= \int_2^{\infty} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_2^r f(t) dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_2^r 2e^{-2t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} -e^{-2t} \Big|_2^r = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-2} - e^{-2r} = e^{-4}. \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio calcular F_{ξ} .

Notamos como en estos ejemplos nos hemos olvidado por completo de la v.a. que describe el fenómeno a estudiar y cómo nos remitimos al nuevo espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P^*)$.

2.4. Momentos

Los momentos con respecto al origen nos dan una idea de cómo medir la posición respecto al origen de los valores de la v.a. En algunas circunstancias, cuando la densidad de probabilidad se interpreta como la densidad de la masa de un cuerpo, el primer momento viene a ser el centro de gravedad de dicho cuerpo.

Son de particular importancia los momentos con respecto a la media, nos informan sobre cuánto se desvían los valores de ξ del primer momento.

DEFINICIÓN 2.4 Sea ξ una v.a.; diremos que ξ tiene momento de orden r con respecto al origen, y lo denotamos por α_r , si existe la integral

$$\int_{\mathbb{R}} x^r dF_{\xi}(x) \quad (\text{y también } \int_{\mathbb{R}} |x|^r dF_{\xi}(x)),$$

y a

$$\alpha_r = \int_{\mathbb{R}} x^r dF_{\xi}(x) \tag{2.6}$$

lo llamaremos momento de orden r con respecto al origen.

La integral de (2.6) se calcula según sea el tipo de v.a. que estemos tratando:

(i) Si ξ es discreta entonces

$$\alpha_r = \int_{\mathbb{R}} x^r dF_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^r p_i$$

siendo

$$p_i = P_{\xi}^* \{a_i\} = P \{\xi = a_i\}.$$

(ii) Para el caso en que ξ sea continua

$$\alpha_r = \int_{\mathbb{R}} x^r dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_{\xi}(x) dx.$$

Definimos los momentos de orden r con respecto a la media μ , donde por la media se entiende el momento de orden 1 con respecto al origen, i.e. $\mu \doteq \alpha_1$, como

$$\mu_r = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^r dF_{\xi}(x)$$

(se presupone que las integrales $\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^r dF_{\xi}(x)$ y $\int_{\mathbb{R}} |x - \mu|^r dF_{\xi}(x)$ existen).

Para el caso discreto

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - \mu)^r p_i,$$

y para el caso continuo

$$\mu_r = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^r f_{\xi}(x) dx.$$

NOTA 2.7 (i) $\mu_1 = 0$ ya que $\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} (x^2 - 2\mu x - \mu^2) dF_{\xi}(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{\xi}(x) - 2\mu \int_{\mathbb{R}} x dF_{\xi}(x) + \mu^2 \int_{\mathbb{R}} dF_{\xi}(x) = \\ &= \alpha_2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2. \end{aligned}$$

2.4.1. Esperanza

DEFINICIÓN 2.5 *Se define la esperanza de la v.a. ξ , y se denota por $E[\xi]$, como*

$$E[\xi] = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\xi}(x),$$

es decir, como el momento de orden 1.

Se dice que $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria real de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ si $v^{-1}(B) \in \mathcal{B} \forall B \in \mathcal{B}$.

Construimos ahora una nueva v.a. que resulta de componer v y una v.a. ξ :

$$\begin{array}{ccccc} (\Omega, \mathcal{A}, P) & \xrightarrow{\xi} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) & \xrightarrow{v} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ \omega & \rightarrow & \xi(\omega) & \rightarrow & v(\xi(\omega)); \end{array}$$

así pues $\eta \doteq v \circ \xi$ será una nueva v.a. que resulta de componer v y ξ . La esperanza de η es

$$\begin{aligned} E[\eta] &= E[v \circ \xi] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(x) dF_{\xi}(x), \end{aligned}$$

que se traducen, para el caso discreto en

$$E[\eta] = \sum_i v(a_i) p_i,$$

y en el caso continuo en

$$E[\eta] = \int_{\mathbb{R}} v(x) f_{\xi}(x) dx.$$

Nótese que esta definición debe coincidir con

$$E[\eta] = \int_{\mathbb{R}} y dF_{\eta}(y),$$

para lo cual hemos de conocer previamente la función de distribución de η . Enunciamos las principales propiedades de la esperanza:

PROPOSICIÓN 2.3

1. $E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$.
2. $E[C] = C$ con $C = cte$.
3. Supongamos que v es no negativa, i.e. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y $\lambda = cte. > 0$, entonces

$$P\{\omega : v(\xi(\omega)) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} E[v \circ \xi],$$

desigualdad conocida con el nombre de desigualdad de Markov.

Prueba: Las dos primeras son sencillas y se deben a las propiedades de la integral. Demostremos la desigualdad de Markov:

$$\begin{aligned} E[v \circ \xi] &= \int_{\mathbb{R}} v(x) dF_{\xi}(x) \geq \int_{\{v(x) \geq \lambda\}} v(x) dF_{\xi}(x) = \\ &\geq \int_{\{x: v(x) \geq \lambda\}} \lambda dF_{\xi}(x) = \lambda \int_{\{x: v(x) \geq \lambda\}} dF_{\xi}(x) = \\ &= \lambda P\{\omega : v(\xi(\omega)) \geq \lambda\}; \end{aligned}$$

téngase en cuenta que

$$\begin{aligned} P\{\omega : v(\xi(\omega)) \geq \lambda\} &= P\{(v \circ \xi)^{-1}\{[\lambda, \infty)\}\} = \\ &= P\{\xi^{-1}\{v^{-1}\{[\lambda, \infty)\}\}\} = \\ &= P_{\xi}^*\{v^{-1}\{[\lambda, \infty)\}\} = \\ &= \int_{v^{-1}\{[\lambda, \infty)\}} dF_{\xi}(x) = \\ &= \int_{\{x: v(x) \geq \lambda\}} dF_{\xi}(x), \end{aligned}$$

ya que por definición $P\{\xi^{-1}\{A\}\} = P_{\xi}^*\{A\}$.

2.4.2. Varianza

DEFINICIÓN 2.6 Se define la varianza de la v.a. ξ , y se denota por σ^2 , como

$$\sigma^2 = V[\xi] = E[(\xi - \mu)^2],$$

donde $\mu = E[\xi]$.

Al ser la varianza el momento de orden 2 con respecto a la media tenemos que

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Resulta bastante transparente el hecho de que cuanto más dispersos estén los valores de la v.a. mayor será la varianza, o dicho de otro modo, que la media representará mejor a ξ (en el sentido de que la media es el valor más probable) cuanto menor sea σ^2 .

PROPOSICIÓN 2.4

1. $V[\xi] \geq 0$.
2. $V[\xi] = 0 \Rightarrow P\{\omega : \xi(\omega) = \mu\} = 1$ (fenómeno determinista).
3. Sea s un número real. Se define la desviación cuadrática media de la v.a. ξ con respecto al número s como

$$D_\xi(s) = E[(\xi - s)^2] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - s)^2 p_i \\ \int_{\mathbb{R}} (x - s)^2 f_\xi(x) dx \end{cases}.$$

Entonces podemos afirmar que

$$\min_{s \in \mathbb{R}} D_\xi(s) = D_\xi(\mu).$$

4.

$$P\{\omega : (\xi(\omega) - \mu)^2 \geq \lambda^2\} \leq \frac{V[\xi]}{\lambda^2},$$

desigualdad conocida con el nombre de desigualdad de Tchvichev.

La prueba del último apartado se realiza haciendo uso de la desigualdad de Markov: sea $v(x) = (x - \mu)^2$ siendo $\mu = E[\xi]$. Entonces

$$P\{\omega : (\xi(\omega) - \mu)^2 \geq \lambda^2\} \leq \frac{E[v \circ \xi]}{\lambda^2}$$

y

$$E[v \circ \xi] = V[\xi].$$

EJEMPLO 2.10 Sea ξ una v.a. tal que se cumple la siguiente tabla de probabilidades:

x_i	0	2	4	6	8
$P_\xi^*(x_i)$	2/25	15/25	3/25	2/25	3/25

Se pide:

1. Probar que $P_\xi^*(x_i)$ es una función de densidad de masa.
2. Hallar la función de distribución de ξ .
3. Calcular la probabilidad $P(1,1 < \xi < 3,3)$.
4. Hallar la esperanza.

Verificar $P_\xi^*(x_i)$ es densidad de masa resulta inmediato, basta con ver que $p_i = P_\xi^*(x_i) \geq 0$ y que $\sum p_i = 1$. La distribución asociada es

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2/25 & \text{si } x \in [0, 2) \\ 17/25 & \text{si } x \in [2, 4) \\ 20/25 & \text{si } x \in [4, 6) \\ 22/25 & \text{si } x \in [6, 8) \\ 1 & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$

Finalmente $P(1,1 < \xi < 3,3) = F_\xi(3,3) - F_\xi(1,1) = 17/25 - 2/25 = \frac{3}{5}$ y

$$E[\xi] = \sum_{i=1}^5 p_i x_i = \frac{78}{25}$$

EJEMPLO 2.11 Sea ξ v. a. de tipo continuo con función de densidad de probabilidad

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{25} & \text{si } x \in [0, 5] \\ \frac{10-x}{25} & \text{si } x \in [5, 10] \\ 0 & \text{si } x > 10 \end{cases} .$$

Calcular la esperanza de ξ .

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^5 \frac{x^2}{25} dx + \int_5^{10} x \left(\frac{10-x}{25} \right) dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = \\ &= \frac{x^3}{75} \Big|_0^5 + \frac{10x^2}{50} - \frac{x^3}{75} \Big|_5^{10} = 5. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.12 Se considera la v.a. definida como

$$\begin{aligned} \xi : (\Omega, \mathcal{A}, P) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ \omega &\rightarrow \xi(\omega) = a \end{aligned} .$$

Calculamos su esperanza. Es obvio que podemos considerar a ξ como una v.a. de tipo discreto cuyo único punto de masa es a . Así es, $\text{Im } \xi = \{a\}$ y sabemos que $P_{\xi}^*(a) = P\{\omega : \xi(\omega) = a\} = P\{\Omega\} = 1$, por tanto

$$E[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} p_j a_j = a P_{\xi}^*(a) = a.$$

Se calcula fácilmente su función de distribución, es

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases} .$$

EJEMPLO 2.13 Supongamos que en cierto medio radiactivo la duración media que tarda un átomo en desintegrarse es de 50 segundos con una desviación típica $\sigma = 8$. Analizamos 600 átomos de dicho medio. Utilizar la desigualdad de Tchichev para probar que el número de átomos que se desintegran antes de 35 segundos es menor que 171.

Definamos la v.a.

$$\xi = \text{duración en días de una sábana sin rotura.}$$

Observamos que la probabilidad que nos piden evaluar se puede mayorar del siguiente modo

$$\begin{aligned} p &= P\{\xi \leq 35\} = P\{\xi - 50 \leq 35 - 50\} = \\ &\leq P\{(\xi - 50)^2 \geq (-15)^2\} = \\ &\leq \frac{1}{(15)^2} E[(\xi - 50)^2] = \frac{8^2}{(15)^2} = 0.285, \end{aligned}$$

lo cual dice que menos del 29 % aproximadamente de los átomos duran menos de 35 segundos, por tanto, $p \cdot 600$ es el número de átomos de la muestra que duran menos de 35 segundos, i.e.

$$p \cdot 600 \leq (0.285) 600 \approx 171.$$

EJEMPLO 2.14 Dada una v.a. ξ tal que $V[\xi] = 0$ comprobar que $\xi = E[\xi]$ ($= \mu$) con probabilidad 1, es decir $P\{\omega : \xi = E[\xi]\} = 1$.

Para verificar esto tenemos en cuenta lo siguiente: por la desigualdad de Tchevichev

$$P\{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]| > \varepsilon\} = P\{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]|^2 > \varepsilon^2\} \leq \frac{V[\xi]}{\varepsilon^2} = 0$$

para cualquier $\varepsilon > 0$, y como

$$\begin{aligned} \{\omega : \xi(\omega) - E[\xi] \neq 0\} &= \{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]| > 0\} \\ &\subset \cup_{\varepsilon > 0} \{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]| > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} P\{\omega : \xi(\omega) - E[\xi] \neq 0\} &\leq P\{\cup_{\varepsilon > 0} \{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]| > \varepsilon\}\} \\ &\leq \sum_{\varepsilon > 0} P\{\omega : |\xi(\omega) - E[\xi]| > \varepsilon\} = 0. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.15 Sea ξ v.a. con $E[\xi] = 0$ y $V[\xi] = 4$. ¿Es posible que $P\{\xi = 5\} = 1/2$?

Comparamos la probabilidad $P(\xi = 5)$ de manera conveniente al objeto de usar la desigualdad de Tchevichev:

$$P(\xi = 5) \leq P(|\xi| \geq 5) \leq \frac{V[\xi]}{(5)^2} = \frac{4}{(5)^2} = 0.16 < \frac{1}{2}$$

2.5. Problemas propuestos

1. Comprobar que si $F_\xi(x)$ es la función de distribución de la v.a. ξ entonces

$$a) \quad P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) - P_\xi^*(b)$$

$$b) \quad P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) - P_\xi^*(b) + P_\xi^*(a)$$

2. En las mismas condiciones que en el ejercicio precedente demostrar que para todo $x \in \mathbf{R}$

$$P_{\xi}^*(x) = 0$$

supuesto que ξ es una v.a. de tipo continuo.

3. Sea ξ una v.a. tal que se cumple la siguiente tabla de probabilidades:

x_i	1	2	3	4	5
$P_{\xi}^*(x_i)$	2/8	1/8	2/8	2/8	1/8

Se pide:

- Probar que $P_{\xi}^*(x_i)$ es una función de densidad de masa.
- Dibujar la función de distribución de ξ .
- Calcular la probabilidad

$$P(1,1 < \xi < 3,3).$$

4. Dada la v.a. ξ cuya densidad de probabilidad es

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} k \sin(x) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

donde k es una constante, se pide:

- Determinar la constante k para que $f_{\xi}(x)$ sea efectivamente una densidad de probabilidad.
 - Determinar la función de distribución asociada.
 - Calcular $P_{\xi}^*((\pi/4, \pi/2))$.
5. Sea la función $f_{\xi}(x) = \frac{C}{3}$ si $x \in [0, 3]$, e $= 0$ si $x \notin [0, 3]$. Se pide

- Determinar C para que f_{ξ} sea una función de densidad de probabilidad.
- Determinar su función de distribución.
- Calcular

$$P(1,5 < \xi < 3,5).$$

6. Idem con las funciones

a)

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} Cx^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

b)

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} C \exp(-Cx) & \text{si } x \in [0,\infty] \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

c)

$$f_{\xi}(x) = \frac{C}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

7. Determinar el parámetro C para que las siguientes funciones sean funciones de densidad de masa

a) $P_{\xi}^*(x) = C \frac{x-1}{n}$, $x = 2, \dots, n$ y $P_{\xi}^*(x) = 0$ para cualquier otro valor de x .

b) $P_{\xi}^*(x) = C \frac{m^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ y $P_{\xi}^*(x) = 0$ para cualquier otro valor de x .³

c) $P_{\xi}^*(x) = C(\frac{1}{3})^x$, $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ y $P_{\xi}^*(x) = 0$ para cualquier otro valor de x .

8. Calcular la esperanza y desviación típica de cada uno de los apartados de los ejercicios 6 y 7.

9. Sea ξ v.a. de tipo continuo cuya función de densidad de probabilidad es

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) Hallar la función de distribución de ξ

b) Calcular la siguiente probabilidad condicionada

$$P \left\{ \xi > 2 \mid_{\xi < 4} \right\}.$$

³Téngase en cuenta que $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^r}{r!} = e^m$.

10. Sea la variable aleatoria ξ cuya función de densidad de probabilidad es

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se supone que a y b son números tales que $0 < a < b$.

- Calcular el valor de a y de b sabiendo que $P\{a \leq \xi \leq 2a\} = \frac{3}{8}$.
 - Determinar la función de distribución de ξ .
 - Calcular la probabilidad condicionada $P(T|Q)$ siendo T y Q los sucesos $\{\frac{a}{2} \leq \xi \leq \frac{3a}{2}\}$ y $\{a \leq \xi \leq 2a\}$ respectivamente.
11. Se supone que la hospitalización semanal de enfermos en un gran centro de salud sigue una distribución cuya densidad es

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3x - x^2) & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

con x expresado en centenas. ¿Qué cantidad de camas libres debe tener el centro al comienzo de cada semana, si se pretende hospitalizar a todos los enfermos que lo precisen durante dicha semana, con una probabilidad de 0.5?

12. Se supone que la variable aleatoria ξ , que expresa en miles de años el tiempo que permanece activo cierto tipo de deshecho radioactivo, está distribuida con arreglo a la función de densidad de probabilidad

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda(1-x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}.$$

- Determinar λ para que f_{ξ} sea efectivamente una densidad de probabilidad.
- Calcular la probabilidad de que la actividad de un deshecho dure entre 300 y 500 años.
- Si para un determinado deshecho se sabe que su actividad dura más de 600 años, ¿cuál será la probabilidad de que dure entre 400 y 950 años?
- Calcular el tiempo esperado de actividad para el mencionado tipo de deshechos radioactivos.

13. Sea la variable aleatoria η_n que representa la suma de los puntos que salen al lanzar n veces un dado.

- a) Calcular $E[\eta_n]$ y $V[\eta_n]$.
- b) Utilizar la desigualdad de Tchevichev para encontrar un natural $n \in \mathbf{N}$ de modo que

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3.5\right| \geq 0.1\right\} \leq 0.1.$$

14. Sea la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comprobar que es una función de distribución de probabilidad. Determinar su densidad asociada. Calcular, si es posible, la esperanza y varianza.

15. Idem con

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2/3 & \text{si } x \in [0, 5] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

16. Sea la v.a. de tipo discreto ξ cuya función de densidad de masa es

$$P_{\xi}^*(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

donde $p \in (0, 1)$. Determinar $E[\xi]$ y $V[\xi]$.

17. Idem si

a) $P_{\xi}^*(0) = 1/3$ y $P_{\xi}^*(1) = 2/3$.

b) $P_{\xi}^*(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, donde $p \in (0, 1)$.